

# 面向跟踪系统的多传感器信息融合鲁棒保性能协方差交叉 Kalman 估计方法

杨智博<sup>1,2</sup>, 杨春山<sup>1</sup>, 邓自立<sup>1</sup>

(1. 黑龙江大学自动化系, 黑龙江哈尔滨 150080; 2. 北华大学, 吉林吉林 132021)

**摘 要:** 对带不确定方差线性相关白噪声的多传感器系统, 根据极大极小鲁棒估计原理, 用 Lyapunov 方程方法, 基于不确定噪声方差扰动的参数化表示法提出两类鲁棒保性能协方差交叉 (CI) 融合 Kalman 估值器 (预报器、滤波器和平滑器), 给出其精度偏差的最大下界和最小上界. 证明了保性能 CI 融合器的鲁棒精度高于原始 CI 融合器的鲁棒精度, 且高于每个局部估值器的鲁棒精度, 并用协方差椭圆给出精度关系的几何解释. 一个跟踪系统的仿真例子验证了所提方法的正确性和有效性.

**关键词:** 不确定噪声方差; 线性相关噪声; 协方差交叉融合; Lyapunov 方程方法; 跟踪系统

**中图分类号:** O211.64 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2017)07-1627-10

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.07.012

## Tracking System-Oriented Multi-Sensor Information Fusion Robust Guaranteed Cost Covariance Intersection Kalman Estimation Method

YANG Zhi-bo<sup>1,2</sup>, YANG Chun-shan<sup>1</sup>, DENG Zi-li<sup>1</sup>

(1. Automation Department of Heilongjiang University, Harbin, Heilongjiang 150080, China;

2. Beihua University, Jilin, Jilin 132021, China)

**Abstract:** For the multi-sensor systems with uncertain-variance linearly correlated white noises, according to the mini-max robust estimation principle, and by the Lyapunov equation approach, the two classes of guaranteed cost robust covariance intersection (CI) fusion Kalman estimators (predictor, filter, smoother) are presented based on the parameterization representation of the uncertain noise variance perturbations. Both the minimal upper bound and the maximal lower bound of the accuracy deviations are given. It is proved the robust accuracy of the guaranteed cost CI fuser is higher than that of the original CI fuser, and is higher than that of each local estimator, and the geometric interpretation of accuracy relation is given by the covariance ellipses. A simulation example applied to tracking system verifies the correctness and effectiveness of the proposed method.

**Key words:** uncertain noise variances; linearly correlated noises; covariance intersection fusion; Lyapunov equation approach; tracking system

## 1 引言

状态估计问题广泛存在于目标跟踪<sup>[1,2]</sup>、图像处理<sup>[3]</sup>、雷达测速<sup>[4]</sup>、石油或地震勘探数据处理<sup>[5]</sup>、飞行器轨迹测量<sup>[6]</sup>等领域. 随着高科技领域技术的迅猛发展, 对系统状态估计的精度要求越来越高, 这使得多传感器信息融合技术倍受关注. 信息融合估计的目的是对由多传感器所获得的信息进行融合处理得到系统状

态更精确的估值. 信息融合可分为集中式融合和分布式融合. 信息融合的基本方法可分为观测融合和状态融合, 而状态融合包括按矩阵、对角阵、标量加权融合等<sup>[7]</sup>.

多传感器信息融合的基本工具为 Kalman 滤波方法, 经典 Kalman 滤波理论的基本前提之一为假设过程噪声和观测噪声均为白噪声且互不相关, 且假设系统模型参数和噪声方差精确已知<sup>[7]</sup>. 然而, 在工程实践和

理论研究过程中,常需面对带相关噪声系统状态估计问题,特别常见的情形是观测白噪声与过程白噪声线性相关.如广义系统可通过奇异值分解化为带线性相关噪声的子系统<sup>[8]</sup>;带有色观测噪声的传感器系统常可利用差分变换化为带线性相关噪声系统<sup>[9]</sup>;为了估计带白色观测噪声的 ARMA 信号,可将其化为等价的带线性相关噪声系统的状态估计问题<sup>[10]</sup>.

在实际应用中,由于模型简化、未建模动态及不确定干扰等因素,使得上述假设常常不成立,这将导致系统滤波性能恶化,甚至发散.因此,带模型参数和或噪声方差不确定的系统鲁棒滤波问题引起了极大的关注<sup>[11-29]</sup>.所谓鲁棒 Kalman 滤波器,即对于所有容许的不确定性,确保所设计的滤波器的实际滤波误差方差有最小上界<sup>[11]</sup>.对模型参数不确定但假设其范数有界的多传感器系统鲁棒滤波问题常利用 Riccati 方程方法或线性矩阵不等式(LMI)方法<sup>[11]</sup>来求解,但二者主要是针对系统噪声方差精确已知而模型参数不确定的情形;对带未知不确定局部估值误差方差和互协方差的多传感器融合估计问题,文献[12-14]基于局部估值误差方差保守上界的凸组合提出协方差交叉融合(CI)方法;其优点为避免了互协方差的计算,可减小计算负担,扩大适用范围;但其缺点为要求假设局部估值和局部估值误差方差的保守上界已知,且由于忽略了局部估值误差互协方差信息,使得原始 CI 融合算法给出的实际融合估值误差方差上界具有较大的保守性<sup>[15-17]</sup>.CI 融合算法广泛应用于移动机器人同步定位与地图创建<sup>[14]</sup>,飞行器姿态估计<sup>[18]</sup>,目标跟踪、定位、遥感等领域<sup>[19-21]</sup>.当传感器数量增大时,为了减小计算量,文献[22]提出序贯协方差交叉融合 Kalman 滤波器.对带不确定噪声方差系统,文献[15-17]利用 Lyapunov 方程方法分别提出了改进的鲁棒 CI 融合 Kalman 滤波器、预报器和平滑器,给出了实际融合误差方差的最小上界.文献[23]针对带随机参数和不确定噪声方差系统,引入虚拟噪声补偿随机参数不确定性,并利用 Lyapunov 方程方法设计了改进的 CI 融合稳态 Kalman 预报器,改善了原始 CI 融合鲁棒精度,但文献[15-17,23]的局限性均为假设过程噪声和观测噪声互不相关.

对不确定系统鲁棒估计问题而言,存在如何衡量鲁棒估计精度的问题.定义估值误差方差阵的迹为精度指标,较小的迹意味着较高的精度<sup>[24-29]</sup>.文献[15-17]定义实际估值误差方差的迹为实际精度,定义实际估值误差方差最小上界的迹为鲁棒精度;文献[25-29]定义鲁棒精度与实际精度的偏差为精度偏差.但文献[15-17,23]仅给出精度偏差的最大下界,并未深入研究精度偏差的最小上界问题.文献[24]针对带不确定噪声方差和线性相关噪声系统鲁棒估计问题,设计

了改进的 CI 融合极大极小鲁棒 Kalman 估值器,改善了原始融合器的估计精度,但仍未解决精度偏差最小上界问题.文献[25,26]采用博弈论方法考虑了精度偏差最小上界问题,但没有考虑精度偏差最大下界问题,且没有解决多传感器信息融合问题.保性能意味着确保估值精度偏差在预置指标范围内<sup>[25-29]</sup>.文献[27]利用不确定噪声方差扰动的参数化表示方法,针对带噪声方差不确定的定常系统提出了精度偏差的概念及两类鲁棒保性能滤波问题,并用 Lyapunov 方程方法提出并证明了精度偏差的最大下界和最小上界.文献[28,29]将文献[27]结果推广至多传感器系统,分别设计了两类保性能加权观测融合预报器和估值器,但其要求假设过程噪声和观测噪声互不相关.

就作者所知,对带不确定噪声方差和线性相关白噪声的多传感器鲁棒保性能估计问题尚未见报道,尤其是对此类系统的保性能 CI 融合估计问题也尚未见报道.因此,本文的主要贡献如下:

对带线性相关噪声和不确定噪声方差的多传感器系统,基于不确定噪声方差扰动的参数化方法和极大极小鲁棒估计原理,利用 Lyapunov 方程方法解决了两类保性能鲁棒 CI 融合估计问题.第一类是已知预置精度偏差指标,求不确定噪声方差的最大扰动域,第二类是已知不确定噪声方差的有界扰动域,反求在该扰动域上精度偏差的最大下界和最小上界.可分别将两类问题转化为利用 Lagrange 乘数法求极值的问题和线性规划(LP)问题,其中第二类问题为第一类问题的逆问题.克服了文献[15-17,23,24]仅给出精度偏差单一边界即最大下界或最小上界的局限性.克服了文献[27-29]假设过程噪声和观测噪声互不相关的局限性.且克服了原始 CI 融合算法需要假设局部估值和误差方差保守估值已知的局限性,本文给出了局部估值及其误差方差的最小上界,克服了其忽略互协方差信息导致实际融合估值误差方差上界具有较大保守性的局限性,且给出了实际融合估值误差方差的最小上界,改进了原始 CI 融合器的鲁棒精度.

文中  $E(\cdot)$  表示数学期望,上标 T 表示矩阵转置,  $\text{tr}(\cdot)$  表示取矩阵的迹值,  $\text{diag}(\cdot)$  表示块对角矩阵.

## 2 问题的提出

考虑带不确定方差线性相关噪声的多传感器系统

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \quad (1)$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t) \quad (2)$$

$$v_i(t) = D_i w(t) + \eta_i(t); i=1, \dots, L \quad (3)$$

其中  $t$  为离散时间,  $y_i(t) \in \mathbf{R}^m$  为第  $i$  个传感器的观测,  $x(t) \in \mathbf{R}^n$  为状态,  $v_i(t) \in \mathbf{R}^m$  和  $w(t) \in \mathbf{R}^l$  为满足式(3)的线性相关白噪声,  $\Phi, \Gamma, H_i, D_i$  为已知的适当维数常阵.

**假设 1**  $w(t)$  和  $\eta_i(t) \in \mathbf{R}^{m_i}$  为零均值互不相关白噪声,其未知不确定实际方差分别为  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_{\eta_i}$ ,已知它们的保守上界分别为  $Q$  和  $R_{\eta_i}$ ,即

$$\bar{Q} \leq Q, \bar{R}_{\eta_i} \leq R_{\eta_i} \quad (4)$$

定义不确定噪声方差扰动为  $\Delta Q = Q - \bar{Q}$ ,  $\Delta R_{\eta_i} = R_{\eta_i} - \bar{R}_{\eta_i}$ ,则有  $\Delta Q \geq 0$ ,  $\Delta R_{\eta_i} \geq 0$ .

由假设 1 可得  $w(t)$  和  $v_i(t)$  的保守和实际相关阵各为

$$S = E[w(t)v_i^T(t)] = QD_i^T, \bar{S} = \bar{Q}D_i^T \quad (5)$$

**假设 2**  $\Delta Q$  和  $\Delta R_{\eta_i}$  可参数化为<sup>[25,27]</sup>

$$\Delta Q = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k Q_k, \Delta R_{\eta_i} = \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)} R_j^{(i)}, \quad 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_k^m, 0 \leq e_j^{(i)} \leq e_j^{(i)m} \quad (6)$$

其中  $\varepsilon_k^m$  和  $e_j^{(i)m}$  分别为扰动参数  $\varepsilon_k$  和  $e_j^{(i)}$  的上界.  $Q_k \geq 0$  和  $R_j^{(i)} \geq 0$  为已知的半正定扰动方位阵.

**注 1** 当  $\bar{Q}$  及  $\bar{R}_{\eta_i}$  为对角阵时,一般选取  $Q_i \geq 0$  为半正定对角阵,其第  $(i, i)$  对角元素为 1,其他元素为 0.类似地,选取  $R_j^{(i)} \geq 0$  为第  $(j, j)$  对角元素为 1,其他元素为 0 的半正定对角阵.因此,不确定扰动可表示为<sup>[27]</sup>:

$$\Delta Q = \text{diag}(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k Q_k, \quad \Delta R_{\eta_i} = \text{diag}(e_1^{(i)} \cdots e_{m_i}^{(i)}) = \sum_{j=1}^{m_i} e_j^{(i)} R_j^{(i)} \quad (7)$$

**假设 3**  $(\Phi - \Gamma S_i R_i^{-1} H_i, \Gamma G)$  为能稳对,其中  $GG^T = Q - S_i R_i^{-1} S_i^T$ ,  $(\Phi, H_i)$  为能检测对.

问题是对系统式(1)~(3),在假设 1~3 下设计两类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器  $\hat{x}_{CI}(t|t+N)$ ,  $N \geq -1$ ,其中  $N = -1, 0$  时分别表示预报器和滤波器,  $N > 0$  为平滑器.

### 3 鲁棒保性能 CI 融合 Kalman 估值器

本文是在局部预报器的基础上统一处理滤波器和平滑器.

#### 3.1 鲁棒局部 Kalman 估值器

依据极大极小鲁棒估计原理<sup>[17]</sup>,对带噪声方差保守上界  $Q$  和  $R_{\eta_i}$  的最坏情形系统式(1)~(3)有实际局部稳态 Kalman 预报器<sup>[7]</sup>

$$\hat{x}_i(t+1|t) = \Psi_{pi} \hat{x}_i(t|t-1) + K_{pi} y_i(t) \quad (8)$$

$$K_{pi} = (\Phi \Sigma_i H_i^T + \Gamma S_i) [H_i \Sigma_i H_i^T + R_i]^{-1} \quad (9)$$

$$\Psi_{pi} = \Phi - K_{pi} H_i \quad (10)$$

其中  $\Psi_{pi}$  为稳定矩阵,  $I_n$  为  $n \times n$  单位阵,  $y_i(t)$  为实际观测,保守预报误差方差  $\Sigma_i$  满足 Riccati 方程

$$\Sigma_i = \Phi \Sigma_i \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T - (\Phi \Sigma_i H_i^T + \Gamma S_i) \quad (11)$$

$$\times (H_i \Sigma_i H_i^T + R_i)^{-1} (\Phi \Sigma_i H_i^T + \Gamma S_i)^T$$

由式(3)引出  $v_i(t)$  的保守和实际方差各为

$$R_i = D_i Q D_i^T + R_{\eta_i}, \bar{R}_i = D_i \bar{Q} D_i^T + \bar{R}_{\eta_i} \quad (12)$$

**引理 1**<sup>[24]</sup> 对带噪声方差保守上界  $Q$  和  $R_{\eta_i}$  的最坏情形保守系统式(1)~(3),在假设 1~3 下,保守和实际预报误差互协方差分别满足 Lyapunov 方程

$$\Sigma_{ij} = \Psi_{pi} \Sigma_{ij} \Psi_{pj}^T + (\Gamma - K_{pi} D_i) Q (\Gamma - K_{pj} D_j)^T + K_{pi} R_{\eta_i} K_{pj}^T \delta_{ij} \quad (13)$$

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \Psi_{pi} \bar{\Sigma}_{ij} \Psi_{pj}^T + (\Gamma - K_{pi} D_i) \bar{Q} (\Gamma - K_{pj} D_j)^T + K_{pi} \bar{R}_{\eta_i} K_{pj}^T \delta_{ij} \quad (14)$$

其中  $\Sigma_{ii} = \Sigma_i$ ,  $\bar{\Sigma}_{ii} = \bar{\Sigma}_i$ ,  $\delta_{ij} = 0 (i \neq j)$ ,  $\delta_{ij} = 1 (i = j)$ .且局部稳态 Kalman 预报器式(8)是鲁棒的,即对满足式(4)的所有容许不确定实际方差,有

$$\bar{\Sigma}_i \leq \Sigma_i; \quad i = 1, \dots, L \quad (15)$$

且  $\Sigma_i$  为  $\bar{\Sigma}_i$  的最小上界.

对带噪声方差保守上界  $Q$  和  $R_{\eta_i}$  的最坏情形系统式(1)~(3),在假设 1~3 下,有统一形式的实际局部 Kalman 滤波器 ( $N=0$ ) 和平滑器 ( $N>0$ )<sup>[7]</sup>

$$\hat{x}_i(t|t+N) = \hat{x}_i(t|t-1) + \sum_{k=0}^N K_i(k) \varepsilon_i(t+k) \quad (16)$$

$$\varepsilon_i(t) = y_i(t) - H_i \hat{x}_i(t|t-1) \quad (17)$$

$$K_i(k) = \Sigma_i \Psi_{pi}^k H_i^T [H_i \Sigma_i H_i^T + R_i]^{-1}, k \geq 0 \quad (18)$$

$$P_i(N) = \Sigma_i - \sum_{k=0}^N K_i(k) [H_i \Sigma_i H_i^T + R_i]^{-1} K_i^T(k) \quad (19)$$

**引理 2**<sup>[24]</sup> 对带噪声方差保守上界  $Q$  和  $R_{\eta_i}$  的最坏情形系统式(1)~(3),在假设 1~3 下,保守和实际滤波和平滑误差互协方差分别为

$$P_{ij}^N = \Psi_{iN} \Sigma_{ij} \Psi_{jN}^T + \sum_{\rho=0}^N M_{i\rho}^{N\rho} Q M_{j\rho}^{N\rho T} + \sum_{\rho=0}^N K_{i\rho}^{N\rho} R_{\eta_i} K_{j\rho}^{N\rho T} \delta_{ij} \quad (20)$$

$$\bar{P}_{ij}^N = \Psi_{iN} \bar{\Sigma}_{ij} \Psi_{jN}^T + \sum_{\rho=0}^N \bar{M}_{i\rho}^{N\rho} \bar{Q} \bar{M}_{j\rho}^{N\rho T} + \sum_{\rho=0}^N \bar{K}_{i\rho}^{N\rho} \bar{R}_{\eta_i} \bar{K}_{j\rho}^{N\rho T} \delta_{ij}$$

其中

$$\Psi_{iN} = I_n - \sum_{k=0}^N K_i(k) H_i \Psi_{pi}^k, N \geq 0$$

$$K_{i\rho}^{N\rho} = \sum_{k=\rho+1}^N K_i(k) H_i \Psi_{pi}^{k-\rho-1} K_{pi} - K_i(\rho)$$

$$K_{i\rho}^{N\rho} = - \sum_{k=\rho+1}^N K_i(k) \Psi_{pi}^{k-\rho-1} \Gamma, M_{i\rho}^{N\rho} = K_{i\rho}^{N\rho} + K_{i\rho}^{N\rho} D_i$$

$$\rho = 0, 1, \dots, N-1; K_{iN}^{N\rho} = 0, K_{iN}^{N\rho} = -K_i(N)$$

当  $N=0$  时,  $K_{i0}^{0\rho} = 0, K_{i0}^{0\rho} = -K_i(0)$ .定义方差  $\bar{P}_i(N) = \bar{P}_{ii}(N), P_i(N) = P_{ii}(N); i = 1, \dots, L$ .局部稳态 Kalman 滤波和平滑器式(16)是鲁棒的,即

$$\bar{P}_i(N) \leq P_i(N); \quad i = 1, \dots, L \quad (21)$$

且  $\bar{P}_i(N)$  有最小上界  $P_i(N)$ .

#### 3.2 鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器及其精度关系

对最坏情形系统,据 CI 融合算法<sup>[15-17]</sup>,有统一形

式的实际稳态 CI 融合 Kalman 估值器

$$\hat{x}_{CI}(t|t+N) = \sum_{i=1}^L \Omega_i^{CI}(N) \hat{x}_i(t|t+N) \quad (22)$$

其中  $\Omega_i^{CI}(N) = \omega_i^{(N)} P_{CI}^*(N) P_i^{-1}(N)$  是最优加权矩阵,  $\hat{x}_i(t|t+N)$  是局部实际 Kalman 估值器,

$$P_{CI}^*(N) = \left[ \sum_{i=1}^L \omega_i^{(N)} P_i^{-1}(N) \right]^{-1} \quad (23)$$

且参数  $\omega_i^{(N)}$  用在约束  $\sum_{i=1}^L \omega_i^{(N)} = 1$  和  $0 \leq \omega_i^{(N)} \leq 1$  下极小化  $\text{tr } P_{CI}^*(N)$  求得<sup>[24]</sup>. 这是一个非线性最优化问题可用 matlab 中 fmincon 工具箱求解.

定义  $\Omega_{CI}(N) = [\Omega_1^{CI}(N), \dots, \Omega_L^{CI}(N)]$ , 分别可得保守和实际的 CI 融合误差方差阵

$$P_{CI}(N) = \Omega_{CI}(N) P_a(N) \Omega_{CI}^T(N) \quad (24)$$

$$\bar{P}_{CI}(N) = \Omega_{CI}(N) \bar{P}_a(N) \Omega_{CI}^T(N) \quad (25)$$

其中定义总体保守和实际的局部估值误差协方差分别为

$$P_a(N) = (P_{ij}(N))_{nL \times nL}, \bar{P}_a(N) = (\bar{P}_{ij}(N))_{nL \times nL}; \quad N \geq -1 \quad (26)$$

且定义

$$P_a(-1) = \Sigma_a = (\Sigma_{ij})_{nL \times nL}, \bar{P}_a(-1) = \bar{\Sigma}_a = (\bar{\Sigma}_{ij})_{nL \times nL}.$$

由式(13)和式(14)分别有总体保守和实际的局部预报误差方差满足 Lyapunov 方程

$$\Sigma_a = \Psi_{pa} \Sigma_a \Psi_{pa}^T + \Gamma_a Q_a \Gamma_a^T + K_{pa} R_\eta K_{pa}^T \quad (27)$$

$$\bar{\Sigma}_a = \Psi_{pa} \bar{\Sigma}_a \Psi_{pa}^T + \Gamma_a \bar{Q}_a \Gamma_a^T + K_{pa} \bar{R}_\eta K_{pa}^T \quad (28)$$

其中定义

$$\begin{aligned} \Psi_{pa} &= \text{diag}(\Psi_{p1}, \dots, \Psi_{pL}), K_{pa} = \text{diag}(K_{p1}, \dots, K_{pL}) \\ R_\eta &= \text{diag}(R_{\eta1}, \dots, R_{\etaL}), \bar{R}_\eta = \text{diag}(\bar{R}_{\eta1}, \dots, \bar{R}_{\etaL}), \\ \Gamma_a &= \text{diag}(\Gamma - K_{p1} D_1, \dots, \Gamma - K_{pL} D_L), \\ Q_a &= \begin{bmatrix} Q & \dots & Q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q & \dots & Q \end{bmatrix}, \bar{Q}_a = \begin{bmatrix} \bar{Q} & \dots & \bar{Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Q} & \dots & \bar{Q} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

由式(20)总体保守和实际的局部滤波和平滑误差协方差各为

$$P_a(N) = \sum_{\rho=0}^N [M_{ap}^{N\rho} Q_a M_{ap}^{N\rho T} + K_{ap}^{N\rho} R_\eta K_{ap}^{N\rho T}] + \Psi_{aN} \Sigma_a \Psi_{aN}^T \quad (30)$$

$$\bar{P}_a(N) = \sum_{\rho=0}^N [M_{ap}^{N\rho} \bar{Q}_a M_{ap}^{N\rho T} + K_{ap}^{N\rho} \bar{R}_\eta K_{ap}^{N\rho T}] + \Psi_{aN} \bar{\Sigma}_a \Psi_{aN}^T \quad (31)$$

其中定义

$$\begin{aligned} \Psi_{aN} &= \text{diag}(\Psi_{1N}, \dots, \Psi_{LN}), \\ M_{ap}^{N\rho} &= \text{diag}(M_{1p}^{N\rho}, \dots, M_{lp}^{N\rho}), \\ K_{ap}^{N\rho} &= \text{diag}(K_{1p}^{N\rho}, \dots, K_{lp}^{N\rho}). \end{aligned}$$

文献[17]证明了原始 CI 融合器的鲁棒性,即

$$P_{CI}(N) \leq P_{CI}^*(N) \quad (32)$$

即  $P_{CI}^*(N)$  是  $\bar{P}_{CI}(N)$  的一个保守上界.

引理 3<sup>[24]</sup> 对带噪声方差保守上界  $Q$  和  $R_{\eta i}$  的最坏情形保守系统式(1)~(3), 在假设 1~3 下, 实际融合估值方差  $\bar{P}_{CI}(N)$  有最小上界  $P_{CI}(N)$ , 且  $\text{tr } P_{CI}(N)$  是  $\text{tr } \bar{P}_{CI}(N)$  的最小上界, 即

$$\bar{P}_{CI}(N) \leq P_{CI}(N), \text{tr } \bar{P}_{CI}(N) \leq \text{tr } P_{CI}(N); N \geq -1 \quad (33)$$

注 2 由引理 1~3 及式(32)~(33)有如下矩阵及矩阵迹不等式精度关系<sup>[24]</sup>

$$\bar{P}_{CI}(N) \leq P_{CI}(N) \leq P_{CI}^*(N) \quad (34)$$

$$\text{tr } \bar{P}_{CI}(N) \leq \text{tr } P_{CI}(N) \leq \text{tr } P_{CI}^*(N) \leq \text{tr } P_i(N) \quad (35)$$

$$\text{tr } \bar{P}_i(N) \leq \text{tr } P_i(N); \quad i = 1, \dots, L \quad (36)$$

精度关系式(35)表明改进的 CI 融合估值器的实际精度高于鲁棒精度, 其鲁棒精度高于原始 CI 融合器的保守鲁棒精度, 且高于任一局部估值器的鲁棒精度. 式(36)表明局部估值器的实际精度高于其鲁棒精度.

### 3.3 第一类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估计问题

保性能鲁棒性定义为融合估值实际精度与鲁棒精度的偏差有双边界: 最大下界和最小上界. 第一类问题为已知精度偏差指标, 求不确定噪声方差最大扰动域; 第二类问题为第一类的逆问题, 即已知噪声方差扰动域, 求精度偏差双边界. 本文基于不确定噪声方差扰动参数化表示将两类问题分别转化为利用 Lagrange 乘数法求极值的问题和线性规划(LP)问题.

对于给定的精度偏差指标  $r(N) > 0$ , 由式(6)可得由不确定噪声方差扰动所构建的最大扰动域为

$$\begin{aligned} \Omega^m(N) &= \Omega_N^m(\Delta Q, \Delta R_{\eta 1}, \dots, \Delta R_{\eta L}) \\ &= \left\{ \begin{aligned} 0 \leq \Delta Q \leq \Delta Q^m(N), 0 \leq \Delta R_{\eta i} \leq \Delta R_{\eta i}^m(N); \\ i = 1, \dots, L \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (37)$$

其中噪声方差最大扰动为

$$\Delta Q^m(N) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k^m(N) Q_k, \quad (38)$$

$$\Delta R_{\eta i}^m(N) = \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)m}(N) R_j^{(i)}$$

由式(37)和式(38), 寻求最大扰动域  $\Omega^m(N)$  等价于寻求最大参数扰动域  $\Omega_0^m(N)$ , 即

$$\begin{aligned} \Omega_0^m(N) &= \\ & \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p, e_1^{(1)}, \dots, e_{q_1}^{(1)}, \dots, e_1^{(L)}, \dots, e_{q_L}^{(L)}) \mid \right. \\ & \left. \begin{aligned} 0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_k^m(N); k = 1, \dots, p; 0 \leq e_j^{(i)} \leq e_j^{(i)m}(N); \\ i = 1, \dots, L; j = 1, \dots, q_i \end{aligned} \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

引理 4<sup>[30]</sup> 考虑 Lyapunov 方程

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\Psi}\mathbf{P}\boldsymbol{\Psi}^T + \mathbf{U} \quad (40)$$

其中  $\mathbf{P}$ ,  $\boldsymbol{\Psi}$  及  $\mathbf{U}$  为  $n \times n$  矩阵, 且  $\mathbf{U}$  为对称阵,  $\boldsymbol{\Psi}$  为稳定矩阵. 若  $\mathbf{U}$  为(半)正定矩阵, 则 Lyapunov 方程有唯一的对称(半)正定解  $\mathbf{P}$ .

**定理 1** 对带线性相关噪声和噪声方差保守上界  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}_\eta$  的最坏情形系统式(1)~(3), 在假设 1~3 下, 有如下第一类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器式(22), 它具有如下保性能鲁棒性, 即对于预置的精度偏差指标  $r(N) > 0$ , 存在最大参数扰动域  $\Omega_0^m(N)$ , 对扰动域内所有扰动参数, 相应的精度偏差满足

$$0 \leq \text{tr } \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) - \text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{cl}}(N) \leq r(N); N \geq -1 \quad (41)$$

其中零和  $r(N)$  分别为精度偏差  $\text{tr } \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) - \text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{cl}}(N)$  的最大下界和最小上界.

**证明** 由式(6)和式(29)有  $\Delta \mathbf{Q}_a$  和  $\Delta \mathbf{R}_\eta$  的参数化表达式

$$\Delta \mathbf{Q}_a = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k \mathbf{Q}_k^a, \quad (42)$$

$$\Delta \mathbf{R}_\eta = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)} \mathbf{R}_j^{(i)a}$$

其中  $\mathbf{Q}_k^a$  为  $l_l \times l_l$  矩阵,  $\mathbf{R}_j^{(i)a}$  为  $m \times m$  矩阵,  $m = m_1 + \dots + m_L$ , 且分别定义

$$\Delta \mathbf{Q}_a = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{Q} & \cdots & \Delta \mathbf{Q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta \mathbf{Q} & \cdots & \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{R}_\eta = \text{diag}(\Delta \mathbf{R}_{\eta_1}, \dots, \Delta \mathbf{R}_{\eta_L}),$$

$$\mathbf{Q}_k^a = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_k & \cdots & \mathbf{Q}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Q}_k & \cdots & \mathbf{Q}_k \end{bmatrix}, \mathbf{R}_j^{(i)a} = \text{diag}(0, \dots, \underbrace{\mathbf{R}_j^{(i)}}_{\text{第}(i,j)\text{块矩阵}}, \dots, 0)$$
(43)

由式(27)减式(28), 及式(30)减式(31)分别有

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma}_a = \boldsymbol{\Psi}_{pa} \Delta \boldsymbol{\Sigma}_a \boldsymbol{\Psi}_{pa}^T + \boldsymbol{\Gamma}_a \Delta \mathbf{Q}_a \boldsymbol{\Gamma}_a^T + \mathbf{K}_{pa} \Delta \mathbf{R}_\eta \mathbf{K}_{pa}^T \quad (44)$$

$$\Delta \mathbf{P}_a(N) = \boldsymbol{\Psi}_{aN} \Delta \boldsymbol{\Sigma}_a \boldsymbol{\Psi}_{aN}^T + \sum_{\rho=0}^N \mathbf{M}_{ap}^{Nr} \Delta \mathbf{Q}_a \mathbf{M}_{ap}^{NrT} + \sum_{\rho=0}^N \mathbf{K}_{ap}^{Nr} \Delta \mathbf{R}_\eta \mathbf{K}_{ap}^{NrT}; \quad N \geq 0 \quad (45)$$

由  $\boldsymbol{\Psi}_{pa}$  为稳定阵及引理 4 知 Lyapunov 方程式(44)存在如下唯一解<sup>[27]</sup>

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma}_a = \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_{pa}^s [\boldsymbol{\Gamma}_a \Delta \mathbf{Q}_a \boldsymbol{\Gamma}_a^T + \mathbf{K}_{pa} \Delta \mathbf{R}_\eta \mathbf{K}_{pa}^T] \boldsymbol{\Psi}_{pa}^{sT} \quad (46)$$

将式(42)带入式(46), 可得参数化表示

$$\Delta \boldsymbol{\Sigma}_a = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k \mathbf{A}_k^* + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)} \mathbf{B}_{ij}^* \quad (47)$$

其中

$$\mathbf{A}_k^* = \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_{pa}^s \boldsymbol{\Gamma}_a \mathbf{Q}_k^a \boldsymbol{\Gamma}_a^T \boldsymbol{\Psi}_{pa}^{sT},$$

$$\mathbf{B}_{ij}^* = \sum_{s=0}^{\infty} \boldsymbol{\Psi}_{pa}^s \mathbf{K}_{pa} \mathbf{R}_j^{(i)a} \mathbf{K}_{pa}^T \boldsymbol{\Psi}_{pa}^{sT}$$

则  $\mathbf{A}_k^*$ ,  $\mathbf{B}_{ij}^*$  可分别由以下 Lyapunov 方程求解得出

$$\mathbf{A}_k^* = \boldsymbol{\Psi}_{pa} \mathbf{A}_k^* \boldsymbol{\Psi}_{pa}^T + \boldsymbol{\Gamma}_a \mathbf{Q}_k^a \boldsymbol{\Gamma}_a^T, \quad (48)$$

$$\mathbf{B}_{ij}^* = \boldsymbol{\Psi}_{pa} \mathbf{B}_{ij}^* \boldsymbol{\Psi}_{pa}^T + \mathbf{K}_{pa} \mathbf{R}_j^{(i)a} \mathbf{K}_{pa}^T$$

将式(42)及式(47)带入式(45), 可得

$$\Delta \mathbf{P}_a(N) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k \mathbf{C}_k^*(N) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)} \mathbf{D}_{ij}^*(N); N \geq 0 \quad (49)$$

其中

$$\mathbf{C}_k^*(N) = \boldsymbol{\Psi}_{aN} \mathbf{A}_k^* \boldsymbol{\Psi}_{aN}^T + \sum_{\rho=0}^N \mathbf{M}_{ap}^{Nr} \mathbf{Q}_k^a \mathbf{M}_{ap}^{NrT} \quad (50)$$

$$\mathbf{D}_{ij}^*(N) = \boldsymbol{\Psi}_{aN} \mathbf{B}_{ij}^* \boldsymbol{\Psi}_{aN}^T + \sum_{\rho=0}^N \mathbf{K}_{ap}^{Nr} \mathbf{R}_j^{(i)a} \mathbf{K}_{ap}^{NrT}$$

令  $\Delta \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) = \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) - \bar{\mathbf{P}}_{\text{cl}}(N)$ , 由式(24)减式(25)有

$$\Delta \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}(N) \Delta \mathbf{P}_a(N) \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}^T(N) \quad (51)$$

记  $\boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}(-1) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}$ , 并定义

$$\mathbf{A}_k = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}} \mathbf{A}_k^* \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}^T,$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}} \mathbf{B}_{ij}^* \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}^T,$$

$$\mathbf{C}_k(N) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}(N) \mathbf{C}_k^*(N) \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}^T(N),$$

$$\mathbf{D}_{ij}(N) = \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}(N) \mathbf{D}_{ij}^*(N) \boldsymbol{\Omega}_{\text{cl}}^T(N) \quad (52)$$

分别将式(47), 式(49)及式(52)代入式(51), 并对式(51)两边取迹运算有

$$\begin{aligned} \text{tr } \Delta \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) &= \text{tr } \mathbf{P}_{\text{cl}}(N) - \text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{cl}}(N) \\ &= \sum_{k=1}^p \varepsilon_k c_k(N) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)} d_{ij}(N); \\ N &\geq -1 \end{aligned} \quad (53)$$

其中定义

$$c_k(-1) = a_k = \text{tr } \mathbf{A}_k, c_k(N) = \text{tr } \mathbf{C}_k(N)$$

$$d_{ij}(-1) = b_{ij} = \text{tr } \mathbf{B}_{ij}, d_{ij}(N) = \text{tr } \mathbf{D}_{ij}(N);$$

$$N \geq 0 \quad (54)$$

注意由预置性能指标  $r$  寻求最大参数扰动域  $\Omega_0^m(N)$  的问题即等价于极大化超立方体式(39)的体积

$$J_m(N) = \varepsilon_1^m(N) \cdots \varepsilon_p^m(N) e_1^{(1)m}(N) \cdots e_{q_1}^{(1)m}(N) \cdots e_1^{(L)m}(N) \cdots e_{q_L}^{(L)m}(N) \quad (55)$$

故由式(53)问题又等价于在如下约束条件

$$\sum_{k=1}^p \varepsilon_k^m(N) c_k(N) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)m}(N) d_{ij}(N) = r(N) \quad (56)$$

下极大化  $J_m(N)$  的最优化问题. 因此, 类似于文献[27-29]由 Lagrange 乘数法可得所寻求最大参数扰动域  $\Omega_0^m(N)$  的唯一极大值点为

$$\varepsilon_k^m(N) = r(N) / (p + \sum_{i=1}^L q_i) c_k(N);$$

$$k = 1, \dots, p \quad (57)$$

$$e_j^{(i)m}(N) = r(N) / (p + \sum_{i=1}^L q_i) d_{ij}(N);$$

$$j = 1, \dots, q_i; \quad i = 1, \dots, L$$

类似文献[27-29]易证零和  $r(N)$  分别是精度偏差的最大下界和最小上界,证明从略,证毕.

### 3.4 第二类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估计问题

第二类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估计问题为在已知扰动域上寻求精度偏差的最大下界和最小上界. 显然,当扰动域已知时,由式(53)可知精度偏差  $\text{tr } \Delta \mathbf{P}_{\text{CI}}(N)$  是扰动参数  $\varepsilon_k$  和  $e_j^{(i)}$  的线性函数,其在扰动域上的极值必在边界点处达到<sup>[27]</sup>,为此第二类保性能问题可转化为已知预置扰动域上的线性规划问题来解决.

**定理 2** 对于带线性相关噪声和不确定噪声方差的最坏情形系统式(1)~(3),在假设 1~3 下,有第二类保性能鲁棒 CI 融合 Kalman 估值器式(22),它具有如下保性能鲁棒性,即对于由式(39)给出的预置的不确定噪声方差参数的有界扰动域  $\Omega_0^m(N)$  内的所有扰动,相应实际精度  $\text{tr } \mathbf{P}_{\text{CI}}(N)$  及鲁棒精度  $\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{CI}}(N)$  的偏差  $\text{tr } \Delta \mathbf{P}_{\text{CI}}(N)$  有最小上界  $r_m(N)$  和最大下界 0,即

$$0 \leq \text{tr } \mathbf{P}_{\text{CI}}(N) - \text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{CI}}(N) \leq r_m(N) \quad (58)$$

其中  $r_m(N)$  由下式计算

$$r_m(N) = \sum_{k=1}^p \varepsilon_k^m(N) c_k(N) + \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^{q_i} e_j^{(i)m}(N) d_{ij}(N) \quad (59)$$

**证明** 类似于文献[27-29]易证零和  $r_m(N)$  分别为精度偏差  $\Delta \text{tr } \mathbf{P}_{\text{CI}}(N)$  的最大下界和最小上界.

## 4 仿真例子

**例 1** 考虑带 3 传感器和带不确定噪声方差和有色观测噪声的运动目标(例如:飞机、导弹、舰船、坦克等)跟踪系统<sup>[2,31-34]</sup>

$$x(t+1) = \Phi x(t) + \Gamma w(t) \quad (60)$$

$$z_i(t) = \mathbf{H}_{0i} x(t) + \xi_i(t) \quad (61)$$

$$\xi_i(t+1) = \mathbf{B}_i \xi_i(t) + \eta_i(t); \quad i=1,2,3 \quad (62)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 0.5T_0^2 \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{01} = \mathbf{H}_{03} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{H}_{02} = \mathbf{I}_2$$

其中  $T_0 = 0.2$  为采样周期,  $L = 3$  为传感器个数,状态  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]^T$ ,  $x_1(t), x_2(t)$  分别为运动目标在

时刻  $t$  的位置、速度,  $z_1(t)$  和  $z_3(t)$  是传感器 1 和 3 采集的位置信息,  $z_2(t)$  是传感器 2 采集的位置和速度信息,  $\xi_i(t)$  为有色观测噪声,  $w(t)$  和  $\eta_i(t)$  分别为零均值,保守方差各为  $\mathbf{Q}, \mathbf{R}_{\eta_i}$ , 实际方差各为  $\bar{\mathbf{Q}}, \bar{\mathbf{R}}_{\eta_i}$  的互不相关白噪声. 该模型是跟踪系统的典型的或基本的模型之一,有重要和广泛的应用背景,可应用于移动机器人定位<sup>[14]</sup>,姿态估计<sup>[31]</sup>,GPS 定位<sup>[32]</sup>,火箭跟踪<sup>[33]</sup>,焊缝跟踪<sup>[2]</sup>,雷达跟踪<sup>[34]</sup>等. 然而,在上述文献[31-33]应用研究中的局限性是假设噪声方差  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}_{\eta_i}$  是精确已知的. 没有考虑带不确定噪声方差,且没有考虑带有色观测噪声情形. 这种情形可用本文提出的方法设计两类保性能鲁棒 Kalman 平滑器来保证跟踪精度.

问题是取  $N=1$ ,求局部和两类保性能 CI 融合鲁棒一步平滑器  $\hat{x}_\theta(t|t+1)$ ;  $\theta=1,2,3$ , CI 和实际误差方差  $\bar{\mathbf{P}}_\theta(1)$  及其最小上界  $\mathbf{P}_\theta(1)$ , 及实际和鲁棒精度  $\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_\theta(1)$  和  $\text{tr } \mathbf{P}_\theta(1)$ , 并比较其精度关系.

利用差分变换引入一个新的观测过程<sup>[7,9]</sup>

$$z_i(t) = z_i(t+1) - \mathbf{B}_i z_i(t) \quad (63)$$

可得等价的观测方程为

$$y_i(t) = \mathbf{H}_i x(t) + v_i(t); \quad i=1,2,3 \quad (64)$$

其中  $\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_{0i} \Phi - \mathbf{B}_i \mathbf{H}_{0i}$ ,  $\mathbf{D}_i = \mathbf{H}_{0i} \Gamma$ , 且

$$v_i(t) = \mathbf{D}_i w(t) + \eta_i(t) \quad (65)$$

显然,由式(65)可知,  $v_i(t)$  和  $w(t)$  为线性相关白噪声. 于是原系统式(60)~(62)化为带线性相关噪声系统式(60)和式(64)~(65). 仿真过程中取

$$r(1) = 0.5, \mathbf{Q} = 0.81,$$

$$\mathbf{R}_{\eta_1} = 1, \mathbf{R}_{\eta_2} = \text{diag}(9, 0.16), \mathbf{R}_{\eta_3} = 1.2,$$

$$\bar{\mathbf{R}}_{\eta_1} = 0.8 \mathbf{R}_{\eta_1}, \bar{\mathbf{R}}_{\eta_2} = 0.5 \mathbf{R}_{\eta_2}, \bar{\mathbf{R}}_{\eta_3} = 0.75 \mathbf{R}_{\eta_3},$$

$$p = q_1 = q_3 = 1,$$

$$q_2 = 2, \bar{\mathbf{Q}} = 0.7 \mathbf{Q}, \mathbf{Q}_1 = 1,$$

$$\mathbf{B}_1 = 0.1, \mathbf{B}_2 = \text{diag}(0.06, 0.3), \mathbf{B}_3 = 0.3,$$

$$\mathbf{R}_1^{(1)} = \mathbf{R}_1^{(3)} = 1, \mathbf{R}_1^{(2)} = \text{diag}(1, 0), \mathbf{R}_2^{(2)} = \text{diag}(0, 1)$$

(66)

表 1 给出了鲁棒局部和保性能 CI 融合平滑精度关系,它验证了鲁棒精度关系式(35)~(36).

表 1 局部和保性能 CI 融合一步平滑器的鲁棒和实际精度比较

$\text{tr } \mathbf{P}_1(1)$	$\text{tr } \mathbf{P}_2(1)$	$\text{tr } \mathbf{P}_3(1)$	$\text{tr } \mathbf{P}_{\text{CI}}(1)$	$\text{tr } \mathbf{P}_{\text{CI}}^*(1)$	$\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_1(1)$	$\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_2(1)$	$\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_3(1)$	$\text{tr } \bar{\mathbf{P}}_{\text{CI}}(1)$
0.3438	0.441	0.4882	0.2277	0.415	0.2609	0.2282	0.3579	0.136

为给出矩阵精度比较的几何解释,定义方差  $\mathbf{P}_\theta(N)$  ( $\theta=1,2,3$ , CI) 的协方差椭圆是  $\mathbf{R}^n$  中的点  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  的轨迹  $\{u | u^T \mathbf{P}_\theta(N) u = c\}$ ,不失一般性取常数  $c=1$ . 文献[22]已证明,  $\mathbf{P}_1(N) \leq \mathbf{P}_2(N)$  等价于  $\mathbf{P}_1(N)$  所

对应的协方差椭圆被包含在  $\mathbf{P}_2(N)$  所对应的协方差椭圆内. 图 1 给出了基于协方差椭圆的实际和鲁棒精度比较,其中实线和虚线分别表示保守和实际方差对应的椭圆. 由图 1 可见  $\bar{\mathbf{P}}_i(1)$  的椭圆被包含在  $\mathbf{P}_i(1)$  ( $i=1,2,3$ ) 的椭圆内,  $\bar{\mathbf{P}}_{\text{CI}}(1)$  的椭圆被包含在  $\mathbf{P}_{\text{CI}}(1)$  的椭

圆内,且  $P_{Cl}(1)$  的椭圆被包含在  $P_{Cl}^*(1)$  椭圆内,这验证了矩阵精度关系  $\bar{P}_{Cl}(1) \leq P_{Cl}(1) \leq P_{Cl}^*(1)$ ,  $\bar{P}_i(1) \leq P_i(1)$ .

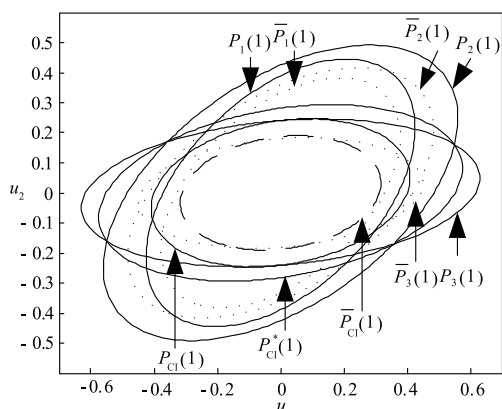


图1 基于协方差椭圆的局部和CI融合保性能鲁棒Kalman平滑器

**情形 1** 预置精度偏差  $r(1) = 0.5$ .

则由式(57),可得最大扰动参数

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^m(1) &= 1.4872, \\ e_1^{(1)m}(1) &= 5.5551, e_1^{(2)m}(1) = 71.7058, \\ e_2^{(2)m}(1) &= 0.9907, e_1^{(3)m}(1) = 1.7432 \end{aligned} \quad (67)$$

由式(38)可得噪声方差最大扰动为

$$\begin{aligned} \Delta Q^m(1) &= 1.4872, \\ \Delta R_{\eta_1}^m(1) &= 5.5551, \Delta R_{\eta_3}^m(1) = 1.7432 \\ \Delta R_{\eta_2}^m(1) &= 71.7058R_1^{(2)} + 0.9907R_2^{(2)} \end{aligned} \quad (68)$$

从而得  $\text{tr} \Delta P_{Cl}^m(1) = 0.5$ .

图 2 给出了第一类问题估计精度偏差  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1)$  关于任意的  $(\Delta Q, \Delta R_{\eta_1}, \Delta R_{\eta_2}, \Delta R_{\eta_3}) \in \Omega^m(1)$  的函数关系,其中  $\Delta R_{\eta_i} = \alpha \Delta R_{\eta_i}^m(1)$ ,  $(0 \leq \alpha \leq 1)$ ,  $\alpha$  为标量变化参数,可保证  $\Delta R_{\eta_i}$  在  $0 \sim \Delta R_{\eta_i}^m(1)$  范围内变化.特别地,取  $\Delta Q = \Delta R_{\eta_1} = \Delta R_{\eta_2} = \Delta R_{\eta_3} = 0$ ,  $(\alpha = 0)$ ,可得  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1) = 0$ .图 2 验证了式(41)的结论:  $0 \leq \text{tr} \Delta P_{Cl}(1) \leq 0.5$ .

**情形 2** 预置不确定噪声方差扰动域  $\varepsilon_1^m(1) = 0.3$ ,  $e_1^{(1)m}(1) = 0.4$ ,  $e_1^{(2)m}(1) = 0.5$ ,  $e_2^{(2)m}(1) = 0.6$ ,  $e_1^{(3)m}(1) = 0.7$ .

由式(59)计算可得精度偏差最大值为  $r_m(1) = 0.1288$ .

图 3 给出了第二类问题估计精度偏差  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1)$  与  $(\Delta Q, \Delta R_{\eta_1}, \Delta R_{\eta_2}, \Delta R_{\eta_3}) \in \Omega^m(1)$  之间的函数关系,其中  $\Delta R_{\eta_i} = \alpha \Delta R_{\eta_i}^m(1)$ ,  $(0 \leq \alpha \leq 1)$ .特别,当取  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,即  $e_1^{(1)} = e_1^{(2)} = 0$ ,  $e_2^{(2)} = e_1^{(3)} = 0$  时,由式(53)可得估计精度偏差为 0.由图 3 可见,对于预置的不确定噪声方差参数扰动域(39)中的所有容许扰动,相应的精度偏差  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1)$  有最小上界  $r_m(1) = 0.1288$  及最大下界 0.图 3 验证了式(58).

图 4 给出了保性能 CI 融合 Kalman 平滑器两个分

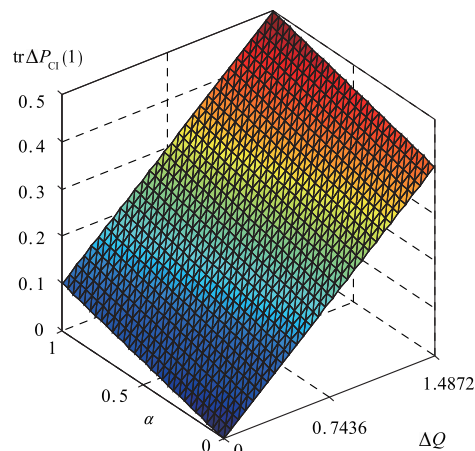


图2 第一类保性能鲁棒Kalman一步平滑器精度偏差  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1)$  随  $\Delta Q$  和  $\alpha$  变化 ( $\Delta R_{\eta_i} = \alpha \Delta R_{\eta_i}^m(1)$ )

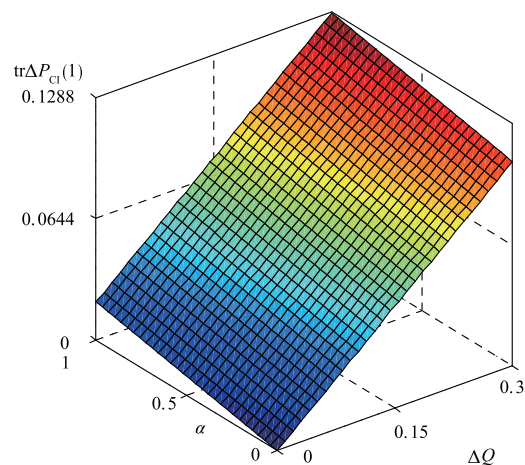


图3 第二类保性能鲁棒Kalman一步平滑器精度偏差  $\text{tr} \Delta P_{Cl}(1)$  随  $\Delta Q$  和  $\alpha$  变化 ( $\Delta R_{\eta_i} = \alpha \Delta R_{\eta_i}^m(1)$ )

量的误差曲线及其实际和保守  $\pm 3$  倍标准差界.子图 (a) (b) 中实曲线分别代表位置和速度误差曲线,点划线和虚线分别代表对应的保守和实际  $\pm 3$  倍标准差界.保守和实际标准差  $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ ;  $i = 1, 2$  分别由式(24) ~ (25) 给出的  $P_{Cl}(1), \bar{P}_{Cl}(1)$  的第  $(i, i)$  个对角元素  $\sigma_i^2, \bar{\sigma}_i^2$ ;  $i = 1, 2$  计算得出.由图 4 可见,超过 99% 的误差曲线位于其  $\pm 3\bar{\sigma}_i$  内,且也位于其  $\pm 3\sigma_i$  界内.图 4 验证了所设计融合器的鲁棒性和  $\bar{P}_{Cl}(1)$  的正确性.

## 5 结论

对带不确定方差线性相关噪声的多传感器系统鲁棒保性能估计问题,本文的主要贡献如下:

依据极大极小鲁棒估计原理和 Lyapunov 方程方法,基于不确定噪声方差扰动参数化表达式,提出了两类保性能鲁棒 CI 融合估计问题的解决方法.对于第一类问题可由预置的精度偏差指标求得最大鲁棒域;而

对于第二类问题可由预置的噪声方差扰动域求得精度偏差双边界. 克服了文献[15-17, 23-26]中鲁棒性仅仅保证精度偏差有最大下界或最小上界的局限性, 克服了文献[27-29]的需假设过程噪声和观测噪声互不

相关的局限性. 且在统一框架下处理融合估值器的两种保性能鲁棒性问题, 给出了实际估计误差方差的最小上界, 提高了原始 CI 融合器的鲁棒精度<sup>[12-14]</sup>具有重要理论意义并在跟踪系统中有重要应用意义.

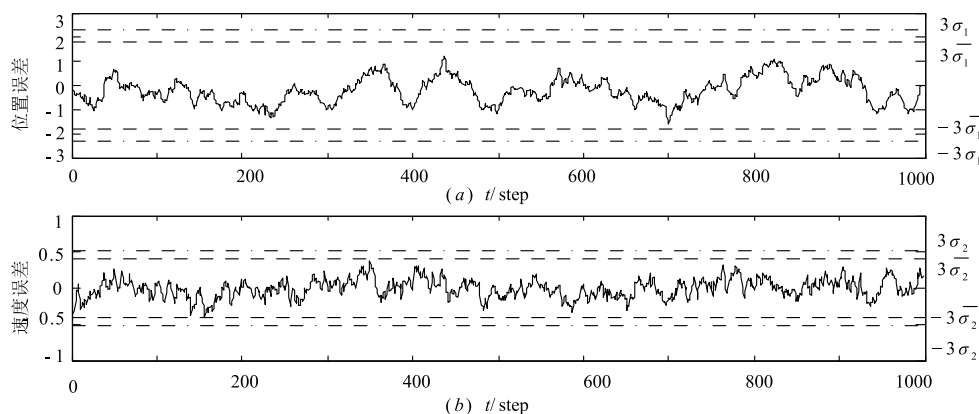


图4 保性能CI融合Kalman平滑误差曲线及其保守和实际 $\pm 3$ 倍标准差界

进一步的研究工作包括将本文结果推广到解决带随机参数、丢失观测、相关噪声、不确定噪声方差等混合不确定性系统的鲁棒保性能估计问题.

#### 参考文献

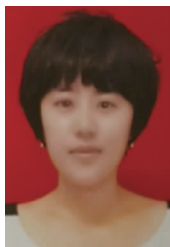
- [1] 冯巍, 胡波, 杨成, 等. 基于贝叶斯理论的分布式多视角目标跟踪算法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 315-321.  
FENG Wei, HU Bo, YANG Cheng, et al. A distributed multi view object tracking algorithm under bayesian framework [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 315-321. (in Chinese)
- [2] 高向东, 仲训果, 游德勇, KATAYAMA Seiji. 色噪声下卡尔曼滤波焊缝跟踪算法的试验研究[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(7): 931-935.  
GAO Xiang-dong, ZHONG Xun-gao, YOU De-yong, KATAYAMA S. Application of Kalman filter with colored noises to the experiment of seam tracking [J]. Control Theory & Applications, 2011, 28(7): 931-935. (in Chinese)
- [3] 胡振涛, 胡玉梅, 刘先省. 量测提升卡尔曼滤波[J]. 电子学报, 2016, 44(5): 1149-1155.  
HU Zhen-tao, HU Yu-mei, LIU Xian-sheng. Kalman filter based on measurement lifting strated [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(5): 1149-1155. (in Chinese)
- [4] 周万幸. 基于多参数延时决策的低重频雷达速度估计方法研究[J]. 电子学报, 2016, 44(6): 1279-1284.  
ZHOU Wan-xing. LPRF radar velocity estimation based on multi-parameter delay decision [J]. Acta Electronica Sinica, 2016, 44(6): 1279-1284. (in Chinese)
- [5] 邓自立, 李云, 王欣. 多传感器最优信息融合白噪声反卷积滤波器[J]. 电子学报, 2005, 33(5): 860-863.  
DENG Zi-li, LI Yun, WANG Xin. Multisensor optimal information fusion white noise deconvolution filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2005, 33(5): 860-863. (in Chinese)
- [6] 陈黎, 王中许, 汪渤. 不完全量测下基于后置置信度残差检测的光电跟踪滤波器设计[J]. 电子学报, 2012, 40(5): 941-948.  
CHEN Li, WANG Zhong-xu, WANG Bo. Optic-electric tracking system filter design based on posterior confidence residual test with intermittent observations [J]. Acta Electronica Sinica, 2012, 40(5): 941-948. (in Chinese)
- [7] 邓自立, 张鹏, 齐文娟. 鲁棒融合卡尔曼滤波理论及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016.  
DENG Zi-li, ZHANG Peng, QI Wen-juan. Robust Information Kalman Filtering Theory [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2016. (in Chinese)
- [8] 高媛, 李怀敏, 邓自立. 带多层融合结构的广义系统 Kalman 融合器[J]. 自动化学报, 2008, 34(6): 639-646.  
GAO Yuan, LI Huai-min, DENG Zi-li. Kalman fuser with multi-layer fusion structure for descriptor systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(6): 639-646. (in Chinese)
- [9] SUN Shu-li, DENG Zi-li. Distributed optimal fusion steady-state Kalman filter for systems with colored measurement noises [J]. International Journal of Systems Science, 2005, 36(3): 113-118.
- [10] SUN Shi-li, LI X Y, YAN S W. Estimators for autoregressive moving average signals with multiple sensors of different missing measurement rates [J]. IET Signal Processing, 2012, 6(3): 178-185.
- [11] LEWIS F L, XIE L H, SOB Y C. Optimal and Robust Estimation (Second Edition) [M]. New York: CRC Press, 2008.
- [12] JULIER S J, UHLMAN J K. A non-divergent estimation

- algorithm in the presence of unknown correlations [A]. Proceedings of the American Control Conference [C]. USA: IEEE Press, 1997(4): 2369 – 2373.
- [13] JULIER S J, UHLMAN J K. General decentralized data fusion with covariance intersection [A]. LIGGINS M E, HALL D L, and LLINAS J (Eds) Handbook of Multisensor Data Fusion, Theory and Practice (2<sup>nd</sup> Ed) [M]. USA: CRC Press, 2009. 319 – 342.
- [14] JULIER S J, UHLMAN J K. Using covariance intersection for SLAM [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2007, 55(1): 3 – 20.
- [15] QI Wen-juan, ZHANG Peng, DENG Zi-li. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor system with uncertain noise variances [J]. Information Sciences, 2014, 282: 15 – 37.
- [16] QI Wen-juan, ZHANG Peng, DENG Zi-li. Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances [J]. Digital Signal Processing, 2014, 30: 37 – 54.
- [17] QI Wen-juan, ZHANG Peng, DENG Zi-li. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances [J]. Signal Processing, 2014, 99(1): 185 – 200.
- [18] 王硕, 宋申民, 史小平, 等. 噪声特性未知的多传感器协方差交叉融合姿态估计 [J]. 控制与决策, 2016, (2): 273 – 278.  
WANG Shuo, SONG Shen-min, SHI Xiao-ping, et al. Multisensor covariance intersection fusion attitude estimation with unknown noise characteristics [J]. Control and Decision, 2016, (2): 273 – 278. (in Chinese)
- [19] FERREIRA JCBDC, WALDMANN J. Covariance intersection-based sensor fusion for sounding rocket tracking and impact area prediction [J]. Control Engineering Practice, 2007, 15(4): 389 – 409.
- [20] LAZARUS S B, ASHOKARAJ I, TSOURDOS A, et al. vehicle localization using sensors data fusion via integration of covariance intersection and interval analysis [J]. IEEE Sensors Journal, 2007, 7(9): 1302 – 1314.
- [21] SIJS J, LAZAR M. State Fusion with unknown correlation ellipsoidal intersection [J]. Automatica, 2012, 48(8): 1874 – 1878.
- [22] DENG Zi-li, ZHANG Peng, QI Wen-juan, et al. Sequential covariance intersection fusion Kalman filter [J]. Information Sciences, 2012, 189: 293 – 309.
- [23] 王雪梅, 刘文强, 邓自立. 不确定系统改进的鲁棒协方差交叉融合稳态 Kalman 预报器 [J]. 自动化学报, 2016, 42(8): 1198 – 1206.  
WANG Xue-mei, LIU Wen-qiang, DENG Zi-li. Modified robust covariance intersection fusion steady-state Kalman predictor for uncertain systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2016, 42(8): 1198 – 1206. (in Chinese)
- [24] 王雪梅, 刘文强, 邓自立. 带不确定协方差线性相关白噪声系统改进的鲁棒协方差交叉融合稳态 Kalman 估值器 [J]. 控制与决策, 2016, 31(10): 1749 – 1756.  
WANG Xue-mei, LIU Wen-qiang, DENG Zi-li. Modified robust covariance intersection fusion steady-state Kalman estimators for systems with uncertain-covariance linearly correlated white noises [J]. Control and Decision, 2016, 31(10): 1749 – 1756. (in Chinese)
- [25] XI H SH. The guaranteed estimation performance filter for discrete-time descriptor systems with uncertain noise [J]. International Journal of Systems Science, 1997, 28(1): 113 – 121.
- [26] XI H SH. Discrete-time robust Kalman filter of guaranteed state estimation performance [J]. Acta Automatica Sinica, 1996, 22(6): 731 – 735.
- [27] 杨智博, 杨春山, 邓自立. 不确定噪声方差定常系统保性能鲁棒 Kalman 滤波器 [J]. 控制理论与应用, 2016, 33(4): 446 – 452.  
YANG Zhi-bo, YANG Chun-shan, DENG Zi-li. Guaranteed cost robust Kalman filter for time-invariant system with uncertain noise variances [J]. Control Theory and Applications, 2016, 33(4): 446 – 452. (in Chinese)
- [28] YANG Chun-shan, YANG Zhi-bo, DENG Zi-li. Guaranteed cost robust measurement fusion steady-state Kalman predictor with uncertain noise variances [J]. Aerospace Science and Technology, 2015, 46(14): 459 – 470.
- [29] YANG Chun-shan, DENG Zi-li. Guaranteed cost robust weighted measurement fusion Kalman estimators with uncertain noise variances and missing measurements [J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(14): 5817 – 5825.
- [30] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. Linear Estimation [M]. New York: Prentice Hall, 2000.
- [31] 汪绍华, 杨莹. 基于卡尔曼滤波的四旋翼飞行器姿态估计和控制算法研究 [J]. 控制理论与应用, 2013, 30(9): 1109 – 1105.  
WANG Shao-hua, YANG Ying. Quadrotor aircraft attitude estimation and control based on Kalman filter [J]. Control and Decision, 2013, 30(9): 1109 – 1105. (in Chinese)
- [32] 王新龙, 申历勋, 丁扬斌. 利用 GPS 进行车辆动态定位的自适应模型研究 [J]. 控制与决策, 2005, 20(1): 103 – 105.  
WANG Xin-long, SHEN Li-xun, DING Yang-bin. Adaptive system model of the vehicle kinematic positioning based on GPS [J]. Control and Decision, 2005, 20(1): 103 – 105. (in Chinese)
- [33] CESAR B D C F J, JACQUES W. Covariance intersection-based sensor fusion for sounding rocket tracking and

impact area prediction [J]. Control Engineering Practice, 2007, 15(4): 389-409.

- [34] CONG J, LI Y, QI G, et al. An order insensitive sequential fast covariance intersection fusion algorithm [J]. Information Sciences, 2016, 367-368: 28-40.

#### 作者简介



杨智博 女, 1983 年生, 博士研究生, 讲师, 主要研究领域为不确定系统鲁棒信息融合.  
E-mail: dengzili789@163.com



杨春山 男, 1975 年生, 博士研究生, 副教授, 主要研究领域为状态估值和多传感器融合鲁棒 Kalman 滤波.

E-mail: dengzili891@163.com



邓自立(通讯作者) 男, 1938 年生, 博士生导师, 教授, 主要研究领域为多传感器信息融合和鲁棒 Kalman 滤波.

E-mail: dzl@hlju.edu.cn